EPREUVE SPECIFIQUE AU CONCOURS CH-TB

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986

Le sujet est constitué de deux exercices indépendants.
Il sera tenu compte, dans la notation, de la qualité de la rédaction et de la présentation matérielle.

I. Etude de la somme de deux projecteurs. (6 points)

Un nombre entier n supérieur ou égal à 2 étant donné, on note E un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{R}$.
On notera Im(f) et Ker(f) l'image et le noyau d'un endomorphisme f de E. L'application identique de E sera notée e et l'application nulle de E sera notée ω, la composition de deux endomorphismes est notée : o.
On appelle projecteur tout endomorphisme p de E qui vérifie : $p \circ p = p$
Dans tout le texte, p et q désignent deux projecteurs et on pose $s = p+q$.

1° Quelques propriétés des projecteurs.
a Quelles sont les valeurs propres possibles pour un projecteur ?

b. Montrer que, pour tout vecteur $\vec{x}$ de E on a : $\vec{x} \in \mathrm{Im}(p) \iff \vec{x} = p(\vec{x})$

c. Montrer que l'image et le noyau d'un projecteur sont supplémentaires.

2° a. Montrer que s est un projecteur si, et seulement si : $p \circ q + q \circ p = \omega$
b. Montrer que s est un projecteur si, et seulement si : $p \circ q = q \circ p$ et $p \circ q = \omega$
c. Montrer qu'alors : $\mathrm{Im}(s) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(s) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$

3° Dans cette question on suppose que : $p \circ q = q \circ p$ et $p \circ q \neq \omega$

a. Montrer qu'alors : $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \neq \{\vec{0}\}$

b. Montrer que les seules valeurs propres possibles de s sont 0, 1 et 2.
c. Exprimer Ker(s), Ker(s-e) et Ker(s-2e) en fonction de Ker(p), Im(p), Ker(q) et Im(q).

II. Calcul d'une valeur approchée d'une intégrale. (14 points)

Par abus de langage, dans tout le problème on confond polynôme et fonction polynôme.
On appelle f l'application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\forall x \in]0,+\infty[\right)\left(f(x) = e^{-\frac{1}{x}}\right)$$

Après avoir étudié quelques propriétés de cette fonction dans la partie A on propose, dans la partie B, une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de son intégrale sur le segment [0,1].

A. Quelques propriétés

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1° a. Montrer que f est de classe C^∞ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et qu'il existe un polynôme P_n tel que :

$$\left(\forall x \in]0,+\infty[\right)\left(f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}\right)$$

Montrer que :

$$(1) \quad : \quad P_{n+1}(x) = (1-2nx)P_n(x) + x^2 P'_n(x)$$

Donner la valeur de $P_n(0)$ et déterminer le degré de P_n.

b. Montrer que f est de classe C^∞ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

2° a. Vérifier que f est solution, sur l'intervalle $[0,+\infty[$, de l'équation différentielle : $x^2 y' - y = 0$

b. En utilisant la formule de Leibnitz donnant la dérivée d'ordre n d'un produit de deux fonctions, en déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2:

$$(2) \quad : \quad P_{n+1}(x) + (2nx-1)P_n(x) + n(n-1)x^2 P_{n-1}(x) = 0$$

c. Déduire des relations (1) et (2) les relations :

$$(3) \quad : \quad P_n(x) = 1 - n(n-1)\int_0^x P_{n-1}(t)\,dt$$

$$(4) \quad : \quad n(n-1)P_n(x) - [(2n-2)x-1]P'_n(x) + x^2 P''_n(x) = 0$$

d. En utilisant les relations précédentes démontrer, par récurrence sur n, que les zéros de P_n sont réels, distincts et séparés par les zéros de P_{n-1} , à partir de $n=3$.

3° a. Déterminer P_1 puis, en utilisant (3), les polynômes P_2 , P_3 , P_4 , P_5

b. En utilisant la relation (4) déterminer les coefficients du polynôme P_n .

c. Etudier les variations de la dérivée quatrième de f, $f^{(4)}$, sur l'intervalle [0,1] et en déduire :

$$\sup_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| < 700$$

B . Calcul de l'intégrale

1° Si g est une fonction intégrable sur un segment $[a,b]$, $a<b$, on pose :

$$I = \int_a^b g(t)\,dt \quad ; \quad c = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad J = \frac{b-a}{6}\left[g(a)+g(b)+4g(c)\right]$$

On veut évaluer, dans cette question, l'erreur commise en prenant J comme valeur approchée de l'intégrale I lorsque la fonction g est de classe C^4 sur le segment $[a,b]$. (Méthode de Simpson)

K étant une constante réelle quelconque on pose :

$$D(x) = \int_{c-x}^{c+x} g(t)\,dt - \frac{x}{3}\left[g(c+x)+g(c-x)+4g(c)\right] \quad \text{et} \quad E(x) = D(x) - Kx^5$$

a. Exprimer $D\left(\frac{b-a}{2}\right)$ en fonction de I et J.

b. Calculer les dérivées de E jusqu'à l'ordre 3 inclus en fonction des dérivées de g.

c. Calculer E(0), E'(0), E''(0) et E'''(0).

On choisit la constante K de façon que : $E\left(\frac{b-a}{2}\right) = 0$. En utilisant plusieurs fois le théorème de Rolle, montrer qu'il existe un réel u strictement compris entre 0 et $\frac{b-a}{2}$ tel que :

$$K = -\frac{g'''(c+u) - g'''(c-u)}{180\,u}$$

en déduire qu'il existe un réel v strictement compris entre a et b tel que :

$$K = -\frac{g^{(4)}(v)}{90}$$

d. Montrer que : $$|I-J| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \operatorname*{Sup}_{x\in[a,b]} |g^{(4)}(x)|$$

2° Pour calculer une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$, on va couper le segment [0,1] en p segments égaux, p entier naturel non nul, et appliquer le résultat de la question précédente sur chacun des segments. On note J_p la valeur approchée obtenue en faisant la somme des valeurs approchées sur chacun des segments.

a. Exprimer J_p en fonction de p.

b. Donner un algorithme permettant de calculer J_p , l'entier p étant donné.

c. Montrer que : $$|I-J_p| \leq \frac{1}{2880\,p^4} \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)|$$

d. En utilisant les résultats de la partie A, déterminer p, pour que l'erreur faite en remplaçant I par J_p soit inférieure à 10^{-6}.
Donner cette valeur approchée de I.